

机械工程测试技术 广东工业大学机电工程学院

第一章 信号及其描述

测试技术的一般问题

- 信号的分类与描述
- 周期信号与离散频谱
- 瞬变非周期信号与连续频谱
- 随机信号

信号及其描述 广东工业大学机电工程学院

1.1 信号的分类与描述

1.1.1 信号的分类

从不同角度观察信号，可以将其分为：

- 1 从信号描述上分
 - 确定性信号与非确定性信号；
- 2 从信号的幅值和能量上
 - 能量信号与功率信号；
- 3 从分析域上
 - 时限信号和频限信号；
- 4 从连续性
 - 连续时间信号与离散时间信号；
- 5 从可实现性
 - 物理可实现信号与物理不可实现信号。

1.1.1 信号的分类 广东工业大学机电工程学院

1. 确定性信号与随机信号（非确定性信号）

可以用明确数学关系式描述的信号称为确定性信号。不能用数学关系式描述的信号称为非确定性信号(随机信号)。

```

    graph LR
      信号 --> 确定性信号
      信号 --> 非确定性信号
      确定性信号 --> 周期信号
      确定性信号 --> 非周期信号
      周期信号 --> 简单周期信号
      周期信号 --> 复杂周期信号
      非周期信号 --> 准周期信号
      非周期信号 --> 瞬态信号
      非确定性信号 --> 平稳随机信号
      非确定性信号 --> 非平稳随机信号
    
```

1 确定性信号与随机信号 广东工业大学机电工程学院

信号的分类主要是依据信号波形特征来划分的，在介绍信号分类前，先建立信号波形的概念。

信号波形：被测信号信号幅度随时间的变化历程称为信号的波形。

信号波形图：用被测物理量的强度作为纵坐标，用时间做横坐标，记录被测物理量随时间的变化情况。

1 确定性信号与随机信号 广东工业大学机电工程学院

1). 周期信号

经过一定时间可以重复出现的信号, 即有 $x(t) = x(t + nT)$

1 确定性信号与非确定性信号 广东工业大学机电工程学院

2). 非周期信号

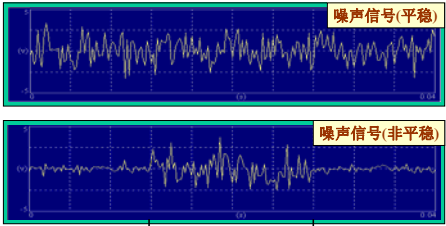
不会重复出现的信号。

准周期信号: 由多个周期信号合成, 但各周期信号的频率不成公倍数, 其合成信号不是周期信号。如: $x(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}.t)$

瞬态信号: 持续时间有限的信号, 如 $x(t) = e^{-Bt} \cdot A \sin(2\pi f t)$

1 确定性信号与随机信号 广东工业大学机电工程学院

3). 随机信号(非确定性信号)
 不能用数学式描述, 其幅值、相位变化不可预知, 所描述物理现象是一种随机过程。



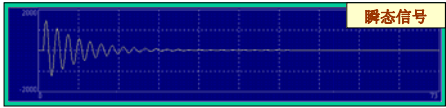
1.1.1 信号的分类 广东工业大学机电工程学院

2 能量信号与功率信号

1). 能量信号
 在所分析的时间区间 $(-\infty, \infty)$, 能量J为有限值的信号称为能量信号, 满足条件:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

一般持续时间有限的瞬态信号是能量信号。

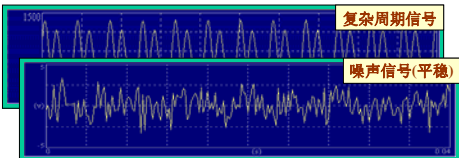


2 能量信号与功率信号 广东工业大学机电工程学院

2). 功率信号
 在所分析的时间区间 $(-\infty, \infty)$, 能量J不是有限值。此时, 研究信号的平均功率P更为合适。

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt < \infty$$

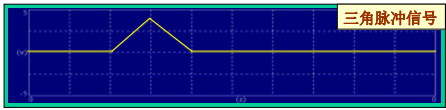
一般持续时间无限的信号都属于功率信号。



1.1.1 信号的分类 广东工业大学机电工程学院

3. 时限与频限信号

1). 时域有限信号
 在时间段 (t_1, t_2) 内有定义, 其外恒等于零。



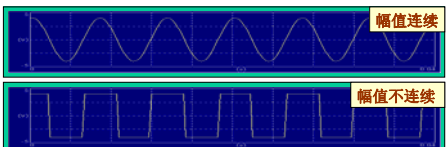
2). 频域有限信号
 在频率区间 (f_1, f_2) 内有定义, 其外恒等于零。




1.1.1 信号的分类 广东工业大学机电工程学院

4. 连续时间信号与离散时间信号

1). 连续时间信号: 在所有时间点上都有定义



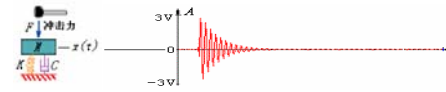
2). 离散时间信号: 在若干时间点上都有定义



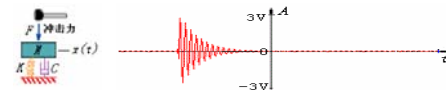
1.1 信号的分类 广东工业大学机电工程学院

5. 物理可实现信号与物理不可实现信号

1). 物理可实现信号: 又称为单边信号, 满足条件: $t < 0$ 时, $x(t) = 0$, 即在时刻小于零的一侧全为零。



2). 物理不可实现信号: 在事件发生前($t < 0$)就预知知信号。



1.1.2 信号的时域描述和频域描述

1. 信号的时域描述：以时间为独立变量，反映信号幅值随时间变化的关系。

图1-4所示周期方波的时域表达式为

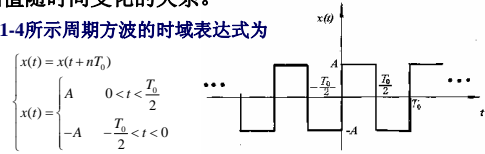


图1-4 周期方波

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin n\omega_0 t \right) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right)$$

式中, $n=1,2,3,\dots,\infty$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

1.1.2 信号的时域描述和频域描述

2. 信号的频域描述：以频率为独立变量，反映信号各频率成分的幅值、相位与频率之间的关系。

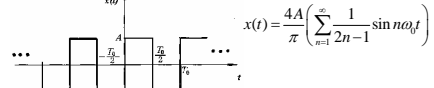
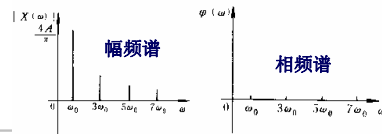


图1-4 周期方波



1.1.2 信号的时域描述和频域描述

3. 注意

- (1) 时域描述反映出信号瞬时值随时间变化的情况；
频域描述反映信号的频率组成及其幅值、相角之大小。
- (2) 根据不同的需要，采用不同的描述方式
如评定机器强度——时域描述，均方根值
寻找振源——频域描述，振动信号的频率分量
- (3) 频率中每个信号都需同时用幅频谱和相频谱来描述。
(对比表1-1中两个周期方波)
- (4) 两种描述方法能相互转换，而且包含同样的信息量。

1.1 信号的分类与描述 广东工业大学机电工程学院

1.1.2 信号的时域描述和频域描述

1. 信号的时域描述：以时间为独立变量，反映信号幅值随时间变化的关系。

图1-4所示周期方波的时域表达式为

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A & -\frac{T_0}{2} < t < 0 \end{cases}$$

图1-4 周期方波

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin n\omega_0 t \right) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right)$$

式中, $n=1,2,3,\dots,\infty$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

1.1 信号的分类与描述 广东工业大学机电工程学院

1.1.2 信号的时域描述和频域描述

2. 信号的频域描述：以频率为独立变量，反映信号各频率成分的幅值、相位与频率之间的关系。

图1-4 周期方波

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin n\omega_0 t \right)$$

幅频谱 相频谱

1. 信号及其描述 广东工业大学机电工程学院

1.2 周期信号与离散频谱

一. 周期信号的傅里叶级数及单边频谱

1. 周期信号x(t)的傅里叶级数的三角展开式

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (n=1,2,3,\dots)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

1. 信号及其描述 广东工业大学机电工程学院

狄里赫利条件

傅里叶在提出傅里叶级数时坚持认为，任何一个周期信号都可以展开成傅里叶级数，虽然这个结论在当时引起许多争议，但持异议者却不能给出有力的不同论据。直到20年后(1829年)狄里赫利才对这个问题作出了令人信服的回答，狄里赫利认为，只有在满足一定条件时，周期信号才能展开成傅里叶级数。这个条件被称为**狄里赫利条件**，其内容为：

- (1) 在一个周期内，周期信号 x(t) 必须绝对可积；
- (2) 在一个周期内，周期信号 x(t) 只能有有限个极大值和极小值；
- (3) 在一个周期内，周期信号 x(t) 只能有有限个不连续点，而且，在这些不连点上，x(t) 的函数值必须是有限值。

一. 周期信号的傅里叶级数及单边频谱 广东工业大学机电工程学院

狄里赫利条件

- 在一周期内，函数是绝对可积的，即 $\int_{t_1}^{t_1+T} |f(t)| dt$ 应为有限值；
- 在一周期内，函数的极值数目为有限；
- 在一周期内，函数f(t)或者为连续的，或者具有有限个这样的间断点，即当t从较大的时间值和较小的时间值分别趋向间断点时，函数具有两个不同的有限的函数值。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} f(t+\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} f(t-\varepsilon)$$

测试技术中的周期信号，大都满足该条件。

一. 周期信号的傅里叶级数及单边频谱 广东工业大学机电工程学院

2. 周期信号的单边频谱

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (n=1,2,3,\dots)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

直流分量 第n次谐波

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n} \end{cases}$$

周期信号是由一个或几个、乃至无穷多个不同频率的谐波叠加而成的。

ω_0 ——基频 $A_1 \cos(\omega_0 t - \varphi_1)$ → 基波

第n次谐波的频率 $\omega_n = n\omega_0$

一. 周期信号的傅里叶级数及单边频谱 广东工业大学机电工程学院

2. 周期信号的单边频谱

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \quad (n=1,2,3,\dots)$$

(1) 幅频谱: A_n — ω_n
 横坐标: ω_n
 纵坐标: A_n

(2) 相频谱: φ_n — ω_n
 横坐标: ω_n
 纵坐标: φ_n

2. 周期信号的单边频谱 广东工业大学机电工程学院

例1-1 求图1-6中周期性三角波的傅里叶级数

$$x(t) = \begin{cases} A + \frac{2A}{T_0}t & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq 0 \\ A - \frac{2A}{T_0}t & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \left(\cos\omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right)$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\omega_0 t$$

幅频谱: A_n — ω 相频谱: φ_n — ω

1.2 信号的分类与描述 广东工业大学机电工程学院

二. 傅里叶级数的复指数函数展开式及双边频谱

1. 欧拉公式

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t \quad j = \sqrt{-1}$$

$$\begin{cases} \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) \\ \sin \omega t = j \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) \end{cases}$$

将上式代入傅里叶级数的三角级数展开式, 可得

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} [e^{-j(n\omega_0 t + \varphi_n)} + e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)}]$$

1.2 信号的分类与描述 广东工业大学机电工程学院

二. 傅里叶级数的复指数函数展开式及双边频谱

2. 傅里叶级数的复指数函数展开式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

C_n 一般为复数, $C_n = c_{nR} + jc_{nI} = |c_n| e^{j\varphi_n}$

$$|c_n| = \sqrt{c_{nR}^2 + c_{nI}^2} = \frac{A_n}{2} \quad \varphi_n = \arctan \frac{c_{nI}}{c_{nR}}$$

C_n 与 C_{-n} 共轭: $|c_n| = |c_{-n}|$; $\varphi_n = -\varphi_{-n}$

1.2 信号的分类与描述 广东工业大学机电工程学院

二. 傅里叶级数的复指数函数展开式及双边频谱

3. 双边频谱

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

双边幅频谱: 偶函数 $|c_n|$ — ω
 双边相频谱: 奇函数 φ_n — ω
 双边实频谱: 偶对称 c_{nR} — ω
 双边虚频谱: 奇对称 c_{nI} — ω

1.2 信号的分类与描述 广东工业大学机电工程学院

二. 傅里叶级数的复指数函数展开式及双边频谱

4. 例1-2, 正余弦函数的频谱

$$\begin{cases} \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) \\ \sin \omega t = j \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) \end{cases}$$

余弦只有实频谱, 与纵轴偶对称

正弦只有虚频谱, 与纵轴奇对称

1.2 信号的分类与描述 广东工业大学机电工程学院

二. 傅里叶级数的复指数函数展开式及双边频谱

5. 周期信号的频谱的特点

- (1) 离散频谱;
- (2) 每条谱线只出现在基波频率的整数倍上, 基波频率是诸分量频率的公约数;
- (3) 各频率分量的谱线高度表示该谐波的幅值或相位角;

1.2 信号的分类与描述 广东工业大学机电工程学院

三. 周期信号强度的表述

1. 峰值 x_p

信号的最大瞬时值

2. 峰-峰值 x_{p-p}

一个周期中最大瞬时值与最小瞬时值之差。

图 1-10 周期信号的强度表示

三. 周期信号强度的表述 广东工业大学机电工程学院

3. 均值: 均值 $E[x(t)]$ 表示集合平均值或数学期望值

$$\mu_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

均值: 反映了信号变化的中心趋势, 也称之为直流分量。

4. 绝对值均值

$$\mu_{|x|} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)| dt$$

三. 周期信号强度的表述 广东工业大学机电工程学院

5. 有效值 x_{rms} 和均方根值

有效值 x_{rms} 为信号的均方根值, 信号平均能量的一种表达

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt}$$

信号有效值 信号波形

工程测量中仪器的表头示值就是信号的有效值。

三. 周期信号强度的表述 广东工业大学机电工程学院

6. 平均功率和均方值 P_{av}

信号的平均功率就是 信号的均方值 $E[x^2(t)]$

$$P_{av} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt$$

波形因数: 是表示周期波波形尖锐程度的因数, 它是周期波的有效值与平均值之比。Form factor
波顶因素: 峰值与有效值之比, crest factor

7. 测量

三. 周期信号强度的表述 广东工业大学机电工程学院

8 典型周期信号的强度描述

表 1-2 几种典型信号的强度

名称	波形图	傅里叶级数展开式	x_0	μ_x	$\mu_{ x }$	x_{rms}
正弦波		$x(t) = A \sin \omega t$ $T_0 = 2\pi/\omega$	A	0	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A}{\sqrt{2}}$
方波		$x(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$	A	0	A	A
三角波		$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right)$	A	0	$\frac{4A}{\pi}$	$\frac{A}{\sqrt{3}}$
锯齿波		$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$	A	$\frac{A}{2}$	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A}{\sqrt{3}}$
正弦整流		$x(t) = \frac{2A}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t + \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t + \dots \right)$	A	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A}{\sqrt{2}}$

1. 信号及其描述 广东工业大学机电工程学院

1.3 非周期信号与连续频谱

准周期信号的频谱保持了周期信号离散频谱的特点
 周期信号的离散频谱线的频率间隔： $\Delta\omega = 2\pi/T_0$
 非周期信号可看作是周期无限大的周期信号： $T_0 \rightarrow \infty$
 则非周期信号的频谱线的频率间隔为

$$\Delta\omega = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} 2\pi/T_0 = 0$$
 所以非周期信号频谱线是连续的
 非周期信号的频域分析手段是傅立叶变换。

1.3 非周期信号与连续频谱 广东工业大学机电工程学院

一. 傅里叶变换和非周期信号的连续频谱

1. 傅里叶变换的定义

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \\ X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(f) = |X(f)| e^{j\varphi(f)} \\ |X(f)| = \sqrt{\text{Re}^2[X(f)] + \text{Im}^2[X(f)]} \\ \varphi(f) = \arctan \frac{\text{Im}[X(f)]}{\text{Re}[X(f)]} \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{cases}$$

1.3 非周期信号与连续频谱 广东工业大学机电工程学院

一. 傅里叶变换和非周期信号的连续频谱

2. 非周期信号的频谱密度

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \Rightarrow \begin{cases} |X(f)| = \sqrt{\text{Re}^2[X(f)] + \text{Im}^2[X(f)]} \\ \varphi(f) = \arctan \frac{\text{Im}[X(f)]}{\text{Re}[X(f)]} \end{cases}$$

连续幅值谱 $|X(f)| - f$
 连续相值谱 $\varphi(f) - f$
 $|X(f)| -$
 表示 f 分量临近单位频宽上的幅值，单位频率的幅值（量纲），类似于物质的密度，不是频率为 f 分量的幅值。但习惯上仍称之为频谱。

1.3 非周期信号与连续频谱 广东工业大学机电工程学院

一. 傅里叶变换和非周期信号的连续频谱

3. 例1-3 求矩形窗函数的频谱

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

$$W(f) = \int_{-T/2}^{T/2} w(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{j2\pi f} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T})$$

$$\sin(\pi f T) = -\frac{1}{2j} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T})$$

$$W(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = T \text{sinc}(\pi f T)$$

1.3 非周期信号与连续频谱 广东工业大学机电工程学院

二. 傅立叶变换的性质

性质	时域	频域	备注
线性	$a x(t) + b y(t)$	$a X(f) + b Y(f)$	
时移	$x(t-t_0)$	$X(f) e^{-j2\pi f t_0}$	
频移	$x(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f-f_0)$	
尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X(f/a)$	
对偶性	$x(t)$	$X(f)$	
卷积	$x(t) * y(t)$	$X(f) Y(f)$	
乘积	$x(t) y(t)$	$X(f) * Y(f)$	
帕塞瓦定理	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$	

二. 傅立叶变换的性质 广东工业大学机电工程学院

1. 奇偶虚实性

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \text{Re} X(f) - j \text{Im} X(f)$$

式中 $\text{Re} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt$ 如 $x(t)$ 为实函数，则为偶函数
 $\text{Im} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi f t dt$ 为奇函数

如果 $x(t)$ 为实偶函数，则 $\text{Im} X(f) = 0$, $X(f) = \text{Re} X(f) = X(-f)$, 是实偶函数
 如果 $x(t)$ 为实奇函数，则 $\text{Re} X(f) = 0$, $X(f) = -j \text{Im} X(f) = X(-f)$, 是实奇函数
 同理：如果 $x(t)$ 为虚偶函数，则 $X(f)$ 是虚偶函数
 如果 $x(t)$ 为虚奇函数，则 $X(f)$ 是实奇函数

二. 傅立叶变换的性质 广东工业大学机电工程学院

2. 对称性

若 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$
 则 $X(t) \rightleftharpoons x(-f)$

应用举例

二. 傅立叶变换的性质 广东工业大学机电工程学院

3. 时间尺度特性

若 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$
 则 $x(kt) \rightleftharpoons \frac{1}{k} X(\frac{f}{k}) \quad (k > 0)$

应用举例

二. 傅立叶变换的性质 广东工业大学机电工程学院

4. 时移和频移特性

若 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$
 时移: $x(t-t_0) \rightleftharpoons X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
 表示信号在时域中平移, 则其幅频谱不变, 而其相频谱中的相角改变量与频率成正比。即 $\Delta\varphi = -2\pi ft_0$, 如表1-1
 频移: $X(f \pm f_0) \rightleftharpoons x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}$

5. 卷积特性

卷积定义: $x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$
 若 $x_1(t) \rightleftharpoons X_1(f) \quad x_2(t) \rightleftharpoons X_2(f)$
 则 $x_1(t) * x_2(t) \rightleftharpoons X_1(f)X_2(f)$
 $x_1(t)x_2(t) \rightleftharpoons X_1(f) * X_2(f)$

二. 傅立叶变换的性质 广东工业大学机电工程学院

5. 微分和积分特性

若 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$
 则: $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \rightleftharpoons (j2\pi f)^n X(f)$
 $\frac{d^n X(f)}{df^n} \rightleftharpoons (-j2\pi t)^n x(t)$
 $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \rightleftharpoons \frac{1}{j2\pi f} X(f)$

1.3 非周期信号与连续频谱 广东工业大学机电工程学院

三. 几种典型信号的频谱

1. 矩形窗函数的频谱

- 时域有限区间信号——频率无限的频谱
- 在时域中截取信号的一段记录长度, 相当于原信号和矩形窗函数之乘积, 所得频谱是原函数频谱函数和 sinc 函数的卷积, 是连续的、频率无限延伸的频谱。
- 主瓣和旁瓣
主瓣的宽度: $2/T$

2. δ (单位脉冲) 函数及其频谱

- 定义:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$
- 采样性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(0)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t_0)dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(t_0)$$

任何函数 $f(t)$ 与 $\delta(t-t_0)$ 的乘积是一个强度为 $f(t_0)$ 的 δ 函数 $\delta(t-t_0)$, 该乘积在无限区间内的积分为 $f(t_0)$ 。

三. 几种典型信号的频谱 广东工业大学机电工程学院

2. δ (单位脉冲) 函数及其频谱

(3) δ 函数与其它函数的卷积

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t \pm t_0 - \tau)d\tau = x(t \pm t_0)$$

δ 函数与函数 $x(t)$ 的卷积结果, 就是在发生 δ 函数的坐标位置上 (以此作为坐标原点) 简单地将 $x(t)$ 重新构图。

(4) δ 函数的频谱

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1$$

$\delta(t-t_0)$ 的频谱: $e^{-j2\pi ft_0}$

$e^{-j2\pi ft_0}$ 的频谱: $\delta(f-f_0)$

三.几种典型信号的频谱 广东工业大学机电工程学院

3. 正余弦函数的频谱密度函数

$$\begin{cases} \sin 2\pi f_0 t = \frac{j}{2}(e^{-j2\pi f_0 t} - e^{j2\pi f_0 t}) \\ \cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}(e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}) \end{cases}$$

正弦函数

$$\begin{cases} \sin 2\pi f_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)] \\ \cos 2\pi f_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] \end{cases}$$

余弦函数

正余弦函数是把频域中的两个函数向两个方向频移后之差或和的傅里叶逆变换

三.几种典型信号的频谱 广东工业大学机电工程学院

4. 周期单位脉冲序列的频谱

(1) 定义:
梳状函数 $\text{comb}(t, T_s)$: 等间隔的周期单位脉冲序列

$$\text{comb}(t, T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

式中, T_s 为周期; n 为整数。

(2) 频谱
周期和强度均为 $1/T_s$ 的周期脉冲序列

1. 信号及其描述 广东工业大学机电工程学院

1.4 随机信号

一. 概述

- 样本函数 $x_s(t)$:**
对随机过程按时间历程所作的各次长时间观测记录
样本记录: 样本函数在有限时间区间上的部分
- 随机过程: 全部样本函数的集合**
 $\{x(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots\}$
- 集合平均和时间平均**
- 平稳随机过程:** 统计特征参数不随时间而变化
非平稳随机过程: 统计特征参数随时间变化而变化
- 各态历经随机过程:** 单个样本的时间平均统计特征等于该过程的集合平均统计特征。
测试时把随机过程当作各态历经随机过程。

1.4 随机信号 广东工业大学机电工程学院

二. 随机过程的主要特征参数

- 均值:** 表示信号的常值分量
$$\mu_x = E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$
- 方差:** 表示信号的波动分量, 反映信号围绕均值的波动程度
$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt$$

 σ_x — 标准偏差
- 均方值:** 表达了信号的强度。
$$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

三者关系: $\psi_x^2 = \mu_x^2 + \sigma_x^2$

1.4 随机信号 广东工业大学机电工程学院

二. 随机过程的主要特征参数

4. 概率密度函数: 表示信号幅值落在指定区间内的概率

$x(t)$ 的值落在 $(x, x + \Delta x)$ 区间内的时间 T_x

$$T_x = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$$

$x(t)$ 的值落在 $(x, x + \Delta x)$ 区间内的时间 P_r

$$P_r[x < x(t) \leq x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T}$$

4. 概率密度函数 广东工业大学机电工程学院

幅值概率密度函数 $p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P_r[x < x(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x}$

四种随机信号的概率密度函数曲线

正弦信号	
正弦信号+随机噪声	
窄带随机噪声	
宽带随机噪声	

三. 样本参数、参数估计和统计采样误差

1. 样本参数: 样本记录的特征参数

2. 参数估计: 利用样本参数作为随机信号特征参数的估计值

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \hat{\psi}_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

3. 统计采样误差: 利用样本参数作为随机信号特征参数的估计值所带来的误差。用均方值误差 $D[\hat{\Phi}]$ 来表示。

$$\begin{aligned} D[\hat{\Phi}] &= E[(\hat{\Phi} - \Phi)^2] \\ &= E[(\hat{\Phi} - E[\hat{\Phi}])^2] + E[(E[\hat{\Phi}] - \Phi)^2] \\ &= \sigma^2[\hat{\Phi}] + b^2[\hat{\Phi}] \end{aligned}$$