第五章 信号处理初步

信号处理目的
- 分离信、噪，提高信噪比
- 提取有用的特征
- 修正测试系统的某些误差

内容方法
- 模拟信号处理系统
- 数字信号处理系统
  - 专用数字信号处理机
  - CAT

章 节 结 构

一、数字信号处理的基本步骤 → 二、信号数字化出现的问题

三、相关分析及其应用

四、功率谱分析及其应用

第一节 数字信号处理的基本步骤

X(t) → 预处理 → A/D转换 → 数字信号处理器或计算机 → 结果显示

X(t) → 预处理 → A/D转换 →

1）电压幅值调理，以适宜采样。2）滤波，以提高信噪比。3）隔离信号中的直流分量。4）调制解调。

模拟信号经采样、量化并转化为二进制

第二节 信号数字化出现的问题

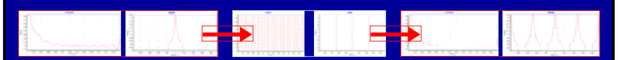
-----本节以计算一个模拟信号的频谱为例来说明出现的相关问题

一.概述

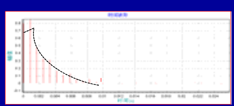
设模拟信号x(t)的傅立叶变换为X(*f*)，为了利用计算机来计算，必须使x(t)变换成有限长的离散时间序列。必需对 x(t)进行采样和截断。

采样是用一个等时距的周期脉冲序列去乘x(t) 。时距T_s称为采样间隔，$f_s=1/T_s$称为采样频率。

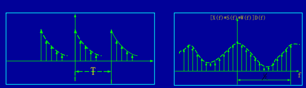
1、时域采样



2、时域截断

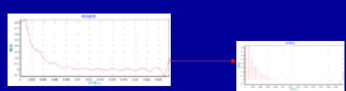


3、频域采样



步骤 一

时域采样



产生问题

混叠

相应定理

步骤 二

采样定理

时域采样

采样是把连续时间信号变成离散时间序列的过程，就是等间距地取点。而从数学处理上看，则是用采样函数去乘连续信号。

依据 **FT的卷积特性——时域相乘就等于频域做卷积**

函数的卷积特性——频域作卷积就等于频 谱的周期延拓

长度为T的连续时间信号x(t),从t=0点开始采样，得到离散时间序列x(n)为

$$x(n)=x(nT_s)=x(n/f_s)$$

重要参数　　　　其中,n=0,1,2,3,……N-1

$$x(nT_s)=x(t)\big|_{t=nT_s}$$

$T_s \rightarrow$ 采样间隔；
$N \rightarrow$ 序列长度，$N=T/T_s$
$f_s \rightarrow$ 采样频率，$f_s=1/T_s$

其中采样间隔的选择是个重要的问题

过小　　过大

工作量会很大　　丢失有用信息

混　　叠

一、定义

在频域中，如果平移距离过小，平移后的频谱就会有一部分相互交叠，从而使新合成的频谱与原频谱不一致，因而无法准确地恢复原时域信号，这种现象称为混叠。

二、原因

（1）、采样频率 f_s 太低

（2）、原模拟信号不是有限带宽的信号，即 $f_h \rightarrow \infty$

三. 采取措施

（1） 对非有限带宽的模拟信号，在采样之前先通过模拟低通滤波器滤去高频成分，使其成为带限信号。这种处理称为抗混叠滤波预处理。

（2）满足采样定理，$f_s > 2f_h$

在实际工作中，考虑实际滤波器不可能有理想的截止特性，在其截止频率 f_c 之后总有一定的过滤带，通常取

$$\boxed{f_s=(3\sim4)f_c}$$

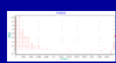
采样定理

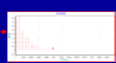
为了避免混叠以使采样处理后仍有可能准确地恢复其原信号，采样频率 f_s 必须大于最高频率 f_h 的两倍即

$$f_s > 2f_h$$

步骤　二

时域截断





产生问题

泄 漏

相应措施

步骤　三　　*窗函数*

时 域 截 断

截断就是将信号乘以时域的有限宽矩形窗函数，实际是取有限长的信号，从数学处理上看，就是乘以时域的有限宽矩形窗函数。

依据 **FT**的卷积特性——时域相乘就等于频域做卷积，作卷积时窗函数频谱的旁瓣会引起皱波。

即在时域中乘矩形窗函数，经处理后其时域、频域的关系是

$$x(t)s(t)\omega(t) \Leftrightarrow X(f)*S(f)*W(f)$$

重要参数

$T \rightarrow$ 采样长度（即窗宽）；

$N = T/T_s$ 序列长度（即采样点数）

其中窗函数的合理选择是个重要的问题

泄　　漏

一、定义

由于矩形窗函数的频谱是一个无限带宽的sinc函数。所以即使x(t)是带限信号，在截断后也仍然成为无限带宽的信号，这种信号的能量在频率轴分布扩展的现象称为泄漏。

二、原因

（1）、窗函数的频谱是无限带宽的。

三、采取措施

（1）　采用合适的**窗函数**来对所截取的时域信号进行加权处理。

常 用 的 窗 函 数

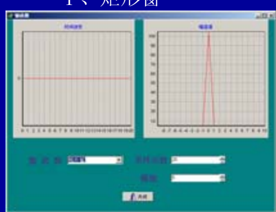
采用不同形式的窗函数 ⇨ 为了减少或抑制泄漏

窗函数评价标准：
- 最大旁瓣值与主峰值之比
- 最大旁瓣的倍频程衰减率

→ 窄的主瓣提高频率分辨能力

- 主瓣宽度 → 小的旁瓣可以减少泄漏

Ⅰ、矩形窗



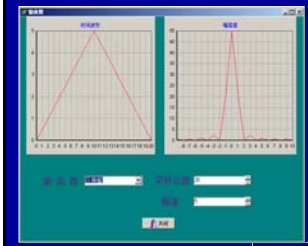
公　式

$$\omega(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

主瓣最窄（高T，宽2/T）旁瓣则较高（主瓣的20%，-13dB

旁瓣的率减率为20dB/10倍频程

Ⅱ、三角窗



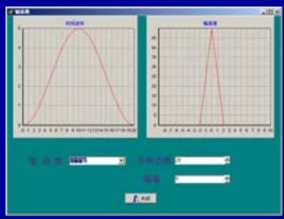
公　式

$$\omega(t)=\begin{cases}1-\dfrac{2}{T}|t| & |t|\le\dfrac{T}{2}\\ 0 & |t|>\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

主瓣较宽（高T/2，宽4/T）
旁瓣则较低

不会出现负值

Ⅲ、汉宁窗



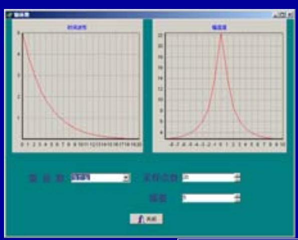
公　式

$$\omega(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) & |t|<\dfrac{T}{2}\\ 0 & |t|\ge\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

主瓣较宽（高T/2，宽4/T）旁瓣则较低（主瓣的2.4%，-32dB

旁瓣的率减率为60dB/10倍程

Ⅳ、指数窗



公　式

$$\omega(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & |t|\ge 0\\ 0 & |t|<0\end{cases}$$

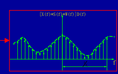
主瓣很宽

无旁瓣

非对称窗，起抑制噪声的作用

步骤　三

频域采样



产生问题

栅栏效应

量 化

栅栏效应

一、定义

采样的实质就是摘取采样点上对应的函数值，其效果有如透过栅栏的缝观看外景一样，只有落在缝隙 前的少数景象被看到，其余景象都被栅栏挡住，视为零。这种现象称为栅栏效应。

二、影响

（不管是时域采样还是频域采样，都有相应的栅栏效应。不过时域采样对比起来时域采样如满足采样定理要求，栅栏效应不会有什么影响。而频域采样的栅栏效应则影响很大，“挡住”或丢失的频率成分有可能是重要的或具有特征的成分，以致于整个处理失去意义。

三、采取措施

（1） 提高频率采样间隔，即提高频率分辨力，则栅栏效应中被挡住的频率成分越少。但同时Δf=1/T是DFT算法固有的特征，在满足满足采样定理的情况下，这往往加剧频率分辨力和计算工作量的矛盾。

（2）对周期信号实行整周期截断。

另 四

——有关量化和量化误差

1、定义

时域采样只是把连续信号的时间离散化了。而对于幅值如果用二进制数码组来表示，就是离散信号变成数字信号。这一过程称为量化。量化一般是由A/D转换器来实现的。

2.量化误差分析

设A/D转换器的位数为b,允许的动态工作范围为D，则相邻量化电平之差

$$\Delta x = D / 2^{b-1}$$

每个量化电平对应一个二进制数码。若采样点的电平落在两相邻量化之间，就必须含入到相近的一个量化电平上。

一般认为，量化误差ε(n)为

$$\varepsilon(n) = x(n)_{实际} - x(n)_{量化电平}$$

在之间等概率分布。 则

$$\begin{cases} 概率密度为\dfrac{1}{\Delta x} \\ 均值为0 \\ 均方值为\dfrac{\Delta x^2}{12} \\ 标准差为\sqrt{方差} = \sqrt{\dfrac{\Delta x^2}{12} - 0} = \dfrac{\Delta x}{2\sqrt{3}} \approx 0.29\Delta x \end{cases}$$

三、采取措施

（1） 提高A/D转换的位数，既降低了量化误差，但A/D转换的位数选择应视信号的具体情况和量化的精度要求而定，位数增多后，成本显著增加，转换速率下降。

（2）实际上，和信号获取、处理的其他误差相比，量化误差通常不大，所以一般可忽略其影响。

5.3 相关分析及其应用

一、相关系数

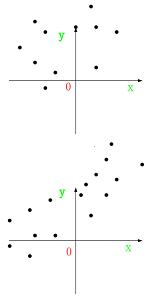
二、自相关函数

三、互相关函数

一. 两变量的相关系数

相关系数ρ_{xy}：描述述变量、之间的相关程度的系数

$$\rho_{xy}=\frac{E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]}{\sigma_x\sigma_y}$$



$E\rightarrow$数学期望；

$\mu_x\rightarrow$随机变量x的均值，$\mu_x=E[x]$

$\mu_y\rightarrow$随机变量x的均值，$\mu_y=E[y]$

$\sigma_x\cdot\sigma_y\rightarrow$随机变量$x\cdot y$的标准差，

$\sigma_x^2=E\left[(x-\mu_x)^2\right]\quad\sigma_y^2=E\left[(y-\mu_y)^2\right]$

根据柯西-许瓦兹不等式，有

$$E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]^2\le E\left[(x-\mu_x)^2\right]E\left[(y-\mu_y)^2\right]$$

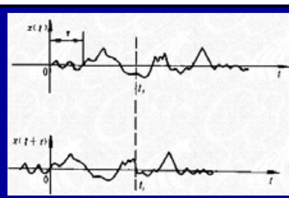
$$|\rho_{xy}|\le 1$$

接近1，两量的相关性愈好

接近于0，两变量之间无关

ρ_{xy}的正负号表示一变量随另一变量的增加或减小；

二、信号的自相关函数



1. 自相关函数的定义

$x(t)$ 是某各态历经随机过程的一个样本记录

$x(t+\tau)$ 是 x(t) 时移τ后的样本

对各态历经随机信号及功率信号定义自相关函数$R_x(\tau)$为

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

自相关系数

$$\rho_x\rho_{x(t+\tau)}=\frac{E[(x(t)-\mu_{x(t)})(x(t+\tau)-\mu_{x(t+\tau)})]}{\sigma_{x(t)}\sigma_{x(t+\tau)}}$$

$x(t)$、$x(t+\tau)$ 具有相同的均值和标准差

于是有

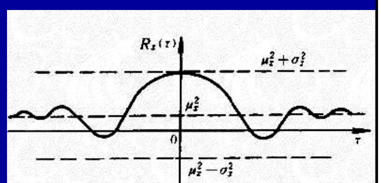
$$\rho_x=\frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt-\mu_x^2}{\sigma_x^2}=\frac{R_x(\tau)-\mu_x^2}{\sigma_x^2}$$

$$R_x(\tau)=\rho_x(\tau)\sigma_x^2+\mu_x^2$$

$\rho_x(\tau)$、$R_x(\tau)$ 均 随 τ 而变化，且两者成线性关系。

物理意义：描述信号的现在值与过去值之间的关系。

2. 自相关函数具有的性质



1) $\mu_x^2-\sigma_x^2\le R_x(\tau)\le\mu_x^2+\sigma_x^2$

2) $R_x(0)=\max[R_x(\tau)]=\psi_x^2$

2. 自相关函数具有的性质

$R_x(\tau)=\rho_x(\tau)\sigma_x^2+\mu_x^2$

3) 对随机信号

$\rho_x(\tau)\underset{\tau\to\infty}{\to}0$

$R_x(\tau)\underset{\tau\to\infty}{\to}\mu_x^2$

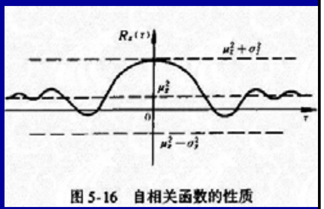


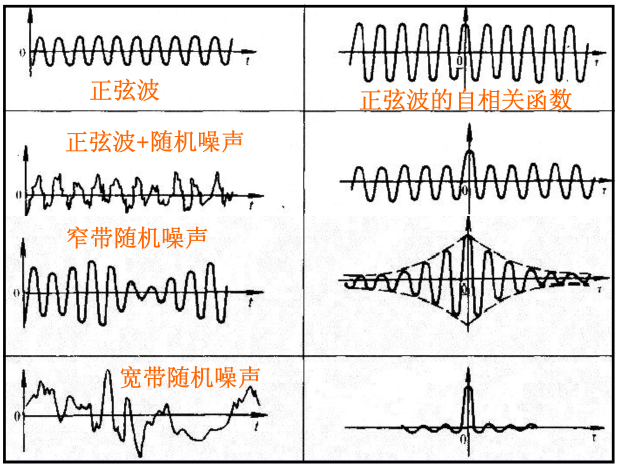
图 5-16 自相关函数的性质

4) 偶函数 $R_x(-\tau)=R_x(\tau)$

5) 周期函数的自相关函数仍为同频率的周期函数。

$x(t)=x_0\sin(\omega t+\varphi)$ ➡ $R_x(\tau)=\frac{x_0^2}{2}\cos\omega\tau$

保留了幅值信息，丢失了相位信息。



3. 工程应用

① 区别信号类型

② 检测混杂在随机信号中的周期成分。

分析一个实例

关于某一机械加工表面粗糙度的波形。

自相关函数图呈现周期性，表明造成表面粗糙度的原因中包含有某种周期因素。

并可找出该周期因素的频率

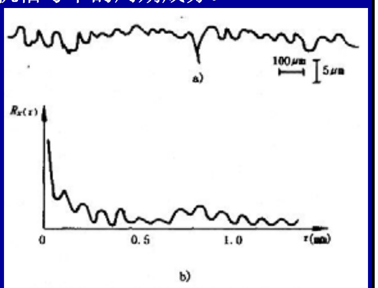


图 5-18 表面粗糙度与自相关函数

a) 表面粗糙度 b) 自相关函数

三、信号的互相关函数

1.互相关函数的定义

两个各态历经过程的随机信号**x(t)**和**y (t)**的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 定义为

$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

互相关系数

$$\rho_{xy}(\tau)=\frac{R_{xy}(\tau)-\mu_x\mu_y}{\sigma_x\sigma_y}$$

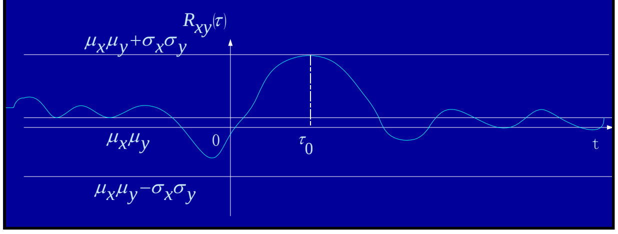
物理意义：描述信号**x(t)**与信号**y(t)**之间的相似程度。

2. 性质

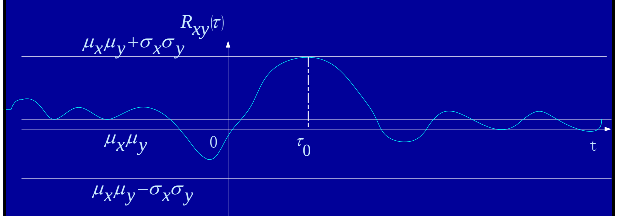
1) $\mu_x\mu_y-\sigma_x\sigma_y\le R_{xy}(\tau)\le\mu_x\mu_y+\sigma_x\sigma_y$

2) $\max[R_{xy}(\tau)]=R_{xy}(\tau_0)$

τ_0为$y(t)$相对$x(t)$的滞后之间



2. 性质



3. 随机信号

$\rho_{xy}(\tau)\underset{\tau\to\infty}{\to}0$ ， $R_x(\tau)\underset{\tau\to\infty}{\to}\mu_x\mu_y$

4. 可正可负的以 τ 为自变量的非偶实值函数；

例题5-2 设有两个周期信号x(t)和y (t)

$$x(t)=x_0\sin(\omega t+\theta)$$

$$y(t)=y_0\sin(\omega t+\theta-\varphi)$$

式中 θ – $x(t)$相对于 $t=0$时刻的相位角；

φ – $x(t)$与$y(t)$的相位差

试求其互相关函数 $R_{xy}(\tau)$

解：

因为函数是周期信号，可以用一个共同周期内的平均值代替其整个历程的平均值，故

$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_0^T x_0\sin(\omega t+\theta)\sin[\omega(t+\tau)+\theta-\varphi]dt$$

$$=\frac{1}{2}x_0y_0\cos(\omega\tau-\varphi)$$

此例可知，两个同频率的信号，其互相关函数保留了圆频率、幅值、及相位差值信息

例5-3 若两个周期信号的圆频率不等

试求其互相关函数

$$x(t)=x_0\sin(\omega_1 t+\theta)$$

$$y(t)=y_0\sin(\omega_2 t+\theta-\varphi)$$

解：因为两信号不具有共同的周期，所以有

$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_0^T x_0y_0\sin(\omega_1 t+\theta)\sin[\omega_2(t+\tau)+\theta-\varphi]dt$$

根据正余弦函数的正交性，可知

$$R_{xy}(\tau)=0$$

5.3.3 互相关函数 广东工业大学机电工程学院

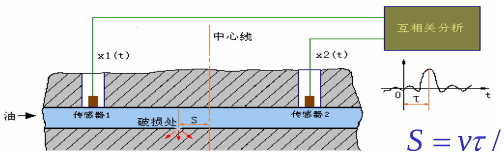
3. 应用

1）测试系统的滞后时间；

2）相关滤波：应用相关分析来滤除信号中的噪声干扰、提取有用信息的处理方法。

3）广泛地应用于各种测试中。

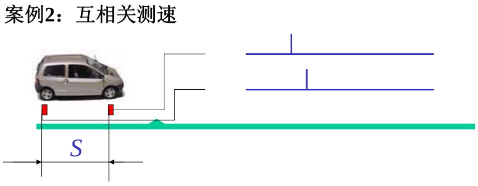
案例1：地下输油管道漏损位置的探测



$$S=v\tau/2$$

互相关分析的应用 广东工业大学机电工程学院

案例2：互相关测速



互相关分析的主要应用：
滞后时间确定→
信号源定位
测速
测距离

$$v=S/\tau$$

4. 相关函数估计

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

实际上只能在有限的观察时间T内

$$\hat{R}_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$\hat{R}_{xy}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

第四节　功率谱分析及其应用

功率谱分析从频域提供相关技术所能提供的信息。是研究平稳随机过程的重要方法。

第四节　功率谱分析及其应用

一、自功率谱密度函数

二、互功率谱密度函数

一、自功率谱密度函数

1.定义：自谱密度函数或自谱，

$x(t)$ 为零均值且不含周期分量，则其自功率谱密度函数为

$$S_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)e^{j2\pi f\tau}d\,f$$

$S_x(f)$与$R_x(\tau)$之间为傅里叶变换对

2. 物理意义

若 $\tau=0$，则根据

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)e^{j2\pi f\tau}d\,f$$

$$R_x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)df$$

而根据

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_x(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt=P_{av}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)df=P_{av}$$

可见，自功率谱密度函数的曲线下和频率轴所包围的面积就是信号的平均功率P_{av}。

物理意义：$S_x(f)$是信号的功率沿频率轴的分布，它描述了信号功率随频率变化的分布关系. 故称之为自功率谱密度函数。

2. 物理意义

$$S_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

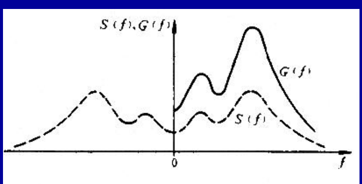


图 5-22　单边谱和双边谱

$R_x(\tau)$为实偶函数 ➡ $S_x(f)$ 亦为实偶函数

因此常用在f=(0~ ∞)范围内 $G_x(f)=2S_x(f)$ 来表示信号的全部功率谱，并把$G_x(f)$称为信号x(t)的单边功率谱。

3、巴塞伐尔定理

在频域中计算的信号总能量，等于在频域中计算的总能量，这就是巴塞伐尔定理即

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$$

$|X(f)|$幅频谱密度，$|X_x(f)|^2$能量谱密度

推论：

$$P_{av}=\frac{1}{T}\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X(f)|^2df$$

$$P_{av}=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)df$$

$$\therefore S_x(f)=\frac{1}{T}\lim_{T\to\infty}|X(f)|^2$$

4. 功率谱估计

$$\hat{S}_x(f)=\frac{1}{T}|X(f)|^2$$

$$\hat{S}_x(k)=\frac{1}{N}|X(k)|^2 \text{其中} k=0,1,2\cdots N-1$$

单边谱 $\hat{G}_x(f)=\frac{2}{N}|X(k)|^2$

计算方法 $x(t)\rightarrow x(n)\xrightarrow{FFT}X(k)\xrightarrow{\text{模平方}}|X(k)|^2\xrightarrow{\text{平均}}\frac{1}{N}|X(k)|^2$

$$=S_x(k)\xrightarrow{IFFT}R_x(r)$$

5. 典型信号的自谱

1）单一频率信号的自谱

周期信号的自谱：脉冲函数，由于截断，实测的自谱曲线具有有限峰值和一定的宽度。

2）随机信号加正弦波

3）窄带随机信号

4）宽带随机信号和白噪声

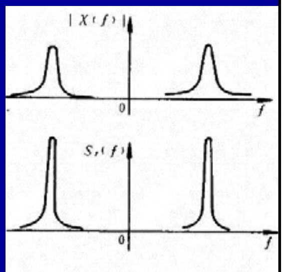


图 5-23 幅值谱与自功率谱

5. 工程应用

（1）分析信号的频域结构
- FT：X(f)
- 功率谱: $S_x(f)$

（2）可分析系统的频率特性 $|H(f)|$

$$S_y(f)=|H(f)|^2\,S_x(f)$$

(3) 检测出信号中有无周期成分

(4) 确定机械结构的固有频率

(5) 鉴别振源、噪声源

(6) 状态监测和故障诊断

二、互谱密度函数

1、定义

如果互相关函数$R_{xy}(\tau)$满足傅立叶变换的条件，则定义

$$S_{xy}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

称为信号的互谱密度函数，简称互谱。根据傅立叶逆变换，有

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xy}(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

物理意义：描述频率域中两个信号相关程度

二、互谱密度函数

2、互谱分析的估计

对于模拟信号

$$\hat{S}_{xy}(f)=\frac{1}{T}X^*(f)_iY(f)_i$$

$$\hat{S}_{xy}(f)=\frac{1}{T}X(f)_iY^*(f)_i$$

对于数字信号

$$\hat{S}_{xy}(k)=\frac{1}{N}X^*(k)_iY(k)_i$$

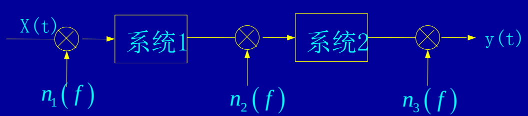
$$\hat{S}_{xy}(k)=\frac{1}{N}X(k)_iY^*(k)_i$$

3、工程应用

（1）可利用互谱求系统的$H(f)$
- $|H(f)|$
- $\varphi(f)$

$$H(f)=\frac{S_{xy}(f)}{S_x(f)}$$

（2）可在强噪声背景下分析系统的传输特性



三. 相干函数

1.定义

$$\gamma_{xy}^2(f)=\frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_x(f)S_y(f)} \quad (0\le\gamma_{xy}^2(f)\le 1)$$

2.物理意义

反映输出信号中有多少来源于输入信号，输出信号的功率谱中有多少是输入量引起的。

对所有的频率 f 都有 $\gamma_{xy}^2(f)=0$，则输入、输出两信号完全不相干

对所有的频率 f 都有 $\gamma_{xy}^2(f)=1$，则输入、输出两信号完全相干，对线性定常系统，说明输出信号完全由该输入信号所引起。

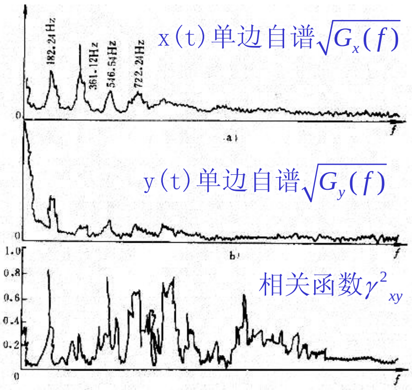
3.应用

船用柴油机润滑油泵压油管振动y(t)和压力脉冲x(t)间的相干分析。

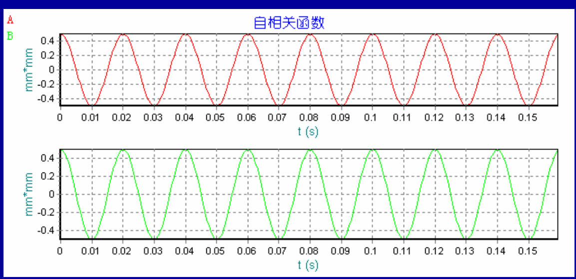
x(t)的基频

$f_0=nz/60$

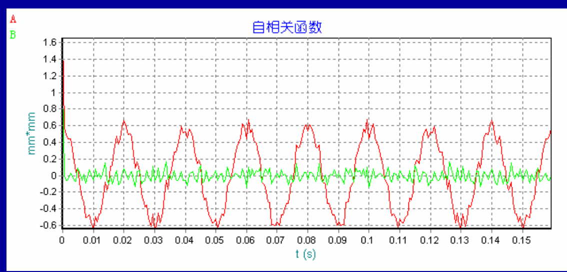
$=182.24$ Hz



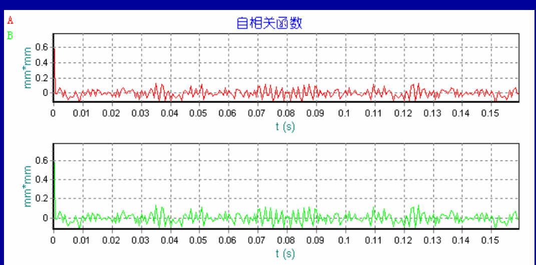
正弦波的自相关函数



正弦波加随机噪声的自相关函数



窄带随机噪声



宽带随机噪声